

SUPPORT DE COURS

Généralités sur les fonctions numériques

1^{ère} BAC – Sciences Mathématiques

Enseignant

Dr : CHOKRI NOUAR

www.chokrinouar.com

Généralités sur les fonctions numériques

4.1 Fonction majorée – Fonction minorée – Fonction bornée

Activité 4.1. Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

En utilisant la forme canonique du trinôme f , montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \geq -1$.

Activité 4.2. Soit la fonction h définie par :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x}{1 + |x|}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h et étudier sa parité.
2. Construire la courbe de la restriction de h sur $[0, +\infty[$, puis construire C_f .
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); h(x) < 1$ et $(\forall x \in \mathbb{R}); h(x) > -1$.
4. La fonction h admet-elle un maximum absolu ?

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 4.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

- f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que $(\forall x \in I) : f(x) \leq M$.
- f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que $(\forall x \in I) : m \leq f(x)$.
- f est bornée sur I s'il existe des réels M et m tels que $(\forall x \in I) : m \leq f(x) \leq M$.

Exemple 4.1. On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$.

- f est majorée sur $]0; +\infty[$ par 1. En effet, $(\forall x \in]0; +\infty[) : f(x) - 1 = -\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x} < 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
- f est minorée sur $] -\infty; 0[$ par 1. En effet, $(\forall x \in] -\infty; 0[) : f(x) - 1 = -\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in] -\infty; 0[$.

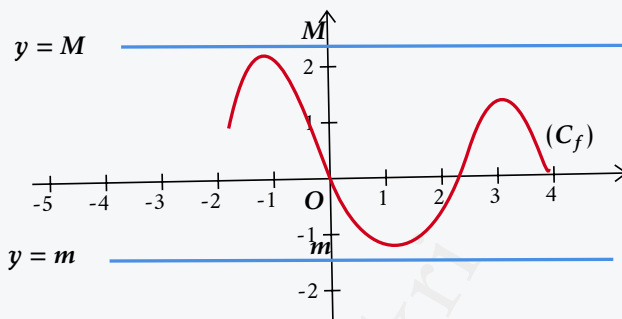
Application 4.1. On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que $(\forall x \in D_f) : f(x) \leq 3$.
3. Montrer que $(\forall x \in D_f) : f(x) \geq 2$.
4. En déduire que f est bornée sur D_f .

Solution.

Remarque. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et (C_f) sa courbe.

- Si f est majorée par un réel M sur I , alors (C_f) est au-dessous de la droite d'équation $y = M$ sur I .
- Si f est minorée par un réel m sur I , alors (C_f) est au-dessus de la droite d'équation $y = m$ sur I .



Application 4.2. On considère f et g les fonctions définies par : $f(x) = 3 - \sqrt{1 - 2x}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

1. Déterminer D_f et D_g .
2. Montrer que f est majorée par 3 sur D_f .
3. Montrer que g est minorée par 2 sur D_g .

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

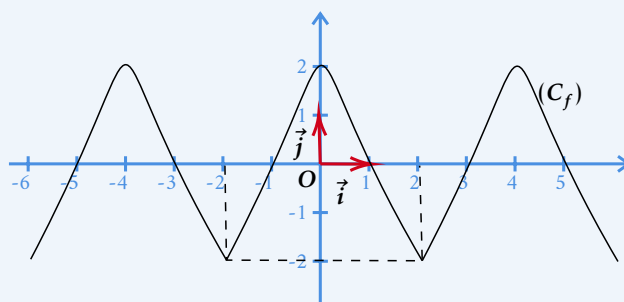
.....

.....

.....

4.2 Fonctions périodiques

Activité 4.3. La figure ci-dessous représente la courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.



1. Vérifier que $f(-2) = f(2)$, $f(0) = f(4)$ et $f(1) = f(5)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer la relation entre $f(x+4)$ et $f(x)$.

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 4.2. Soit f une fonction définie sur D et T un nombre réel strictement positif. On dit que f est **périodique** (ou **T -périodique**) sur D si :

1. $x + T \in D$ pour tout x de D .
2. $f(x + T) = f(x)$ pour tout x de D .

Exemple 4.2. 1. Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont périodiques de période 2π .
 2. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est périodique de période π .

Application 4.3. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x)$ et $g(x) = \sin(2\pi x)$.

Montrer que les fonctions f et g sont périodiques de périodes respectives π et 1.

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4.3 Comparaison de deux fonctions

Définition 4.3. Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble D . On dit que :

- f et g sont égales sur D si et seulement si, $(\forall x \in D) : f(x) = g(x)$.
- f est supérieure ou égale à g sur D si et seulement si, $(\forall x \in D) : f(x) \geq g(x)$ et on écrit $f \geq g$.

Exemple 4.3. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2+2}$ et $g(x) = x + 1$.

On a $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2+2} > 0$. Donc $f > g$ sur $\mathbb{R}^*$.

Interprétation graphique :

- Soient f et g deux fonctions et D un ensemble inclus dans $D_f \cap D_g$.
- Si $f > g$ sur D , alors (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur D .
 - Si $f \leq g$ sur D , alors (C_f) est au-dessous de (C_g) sur D .

Application 4.4. On considère f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

1. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire une comparaison entre f et g sur $\mathbb{R}$.

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

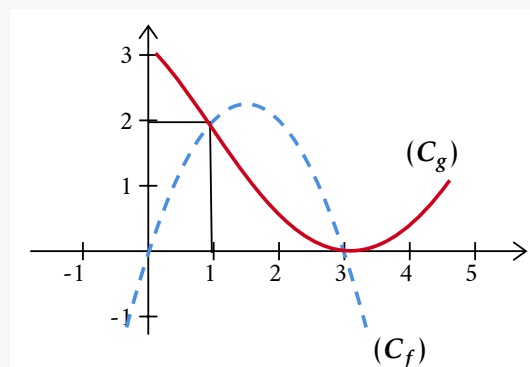
Exercice 4.1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par leurs courbes ci-contre.

1. Résoudre graphiquement les équations suivantes :

- $f(x) = 2$.
- $f(x) = 0$.
- $f(x) = g(x)$.

2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

- $f(x) < 2$.
- $g(x) \geq 0$.
- $f(x) > g(x)$.



Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4.2. Considérons les fonctions $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \frac{2x}{x-1}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Construire les courbes C_f et C_g .
3. Nous définissons le réel $\text{Sup}(a, b)$ par : $\text{Sup}(a, b) = a$ si $a \geq b$. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \sup(f(x), g(x))$.

- (a) Donner une expression de h en fonction de x .
- (b) Construire la courbe représentative de h .

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4.4 Variation d'une fonction numérique et extremums

4.4.1 Monotonie d'une fonction

Définition 4.4. Soit f une fonction définie sur I et $a, b \in I$:

- f est strictement croissante sur I si $a < b$ implique $f(a) < f(b)$.
- f est strictement décroissante sur I si $a < b$ implique $f(a) > f(b)$.
- f est constante sur I si $a < b$ implique $f(a) = f(b)$.

4.4.2 Taux de variation d'une fonction

Définition 4.5. Soit f une fonction dont D_f est son ensemble de définition, et I un intervalle inclus dans D_f . Soient a et b deux éléments distincts de I ; le nombre

$$T_{(a,b)} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

s'appelle le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b .

Propriété 4.1. Soit f une fonction dont D_f est son ensemble de définition, et I un intervalle inclus dans D_f .

- La fonction f est croissante sur I si et seulement si $(\forall (a, b) \in I^2)(a \neq b \Rightarrow T_{(a,b)} \geq 0)$.
- La fonction f est décroissante sur I si et seulement si $(\forall (a, b) \in I^2)(a \neq b \Rightarrow T_{(a,b)} \leq 0)$.

Démonstration. Montrons l'équivalence suivante :

$$f \text{ est croissante sur } I \iff \forall (a, b) \in I^2, a \neq b \Rightarrow T_f(a, b) \geq 0.$$

($\Rightarrow$) **Supposons que f soit croissante sur I .**

Cela signifie que pour tous $a, b \in I$ avec $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$. En particulier, pour $a \neq b$, on a :

$$f(a) \leq f(b) \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0 \Rightarrow T_f(a, b) \geq 0.$$

Ce qui prouve que si f est croissante, alors pour tous $(a, b) \in I^2$ avec $a \neq b$, on a $T_f(a, b) \geq 0$.

($\Leftarrow$) **Supposons maintenant que** $T_f(a, b) \geq 0$ pour tous $(a, b) \in I^2$ avec $a \neq b$. Montrons que cela implique que f est croissante sur I .

Pour tous $a, b \in I$ avec $b \geq a$, on a :

$$\begin{cases} T_f(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0, \\ b \geq a \end{cases} \Rightarrow f(b) - f(a) \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq f(a).$$

D'où la conclusion que f est croissante sur I .

Pour la deuxième propriété, on procède de la même manière. ■

Exemple 4.4. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

1. Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$. Montrer que : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{xy-4}{xy}$.
2. Étudier la monotonie de la fonction f sur les intervalles $[2, +\infty[$ et $]0, 2]$.

1 Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ (avec $x \neq y$) : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{xy-4}{xy}$.

Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \frac{x + \frac{4}{x} - \left(y + \frac{4}{y}\right)}{x - y} \\ &= \frac{x - y + \frac{4}{x} - \frac{4}{y}}{x - y} \\ &= \frac{x - y + \frac{4y-4x}{xy}}{x - y} \\ &= \frac{xy(x - y) + 4(y - x)}{xy} \\ &= \frac{xy(x - y) - 4(x - y)}{xy(x - y)} \\ &= \frac{(x - y)(xy - 4)}{xy(x - y)} = \frac{xy - 4}{xy}. \end{aligned}$$

2 Étudions la monotonie de la fonction f sur les intervalles $[2, +\infty[$ et $]0, 2]$.

— **Monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[2, +\infty[$.**

Soient x et y deux éléments de $[2, +\infty[$ tels que $x \neq y$. On a : $x \geq 2$ et $y \geq 2$, alors $xy \geq 4$ et comme $x \neq y$, donc $xy > 4$, d'où $xy - 4 > 0$. Et comme $xy > 0$, donc :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \quad \text{où} \quad x, y \in [2, +\infty[\text{ et } x \neq y.$$

Ceci signifie que f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

— **Monotonie de la fonction f sur l'intervalle $]0, 2]$.**

Soient x et y deux éléments de $]0, 2]$ tels que $x \neq y$. On a : $0 < x \leq 2$ et $0 < y \leq 2$, alors $0 < xy \leq 4$ et comme $x \neq y$, donc $0 < xy < 4$, d'où $-4 < xy - 4 < 0$. Et comme $xy > 0$, donc :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \quad \text{où} \quad x, y \in]0, 2] \text{ et } x \neq y.$$

Ceci signifie que f est strictement décroissante sur $]0, 2]$.

4.4.3 Monotonie et parité

Propriété 4.2. Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition symétrique par rapport à 0, et soit I un intervalle de $\mathbb{R}^+$ et J son symétrique par rapport à 0 :

- **Si f est paire :**
 - Si f est croissante sur I , alors f est décroissante sur J .
 - Si f est décroissante sur I , alors f est croissante sur J .
- **Si f est impaire :** la fonction f garde le même sens de variations sur I et sur J .

Démonstration. On suppose que f est paire : soit I un intervalle dans $D_f \cap \mathbb{R}^+$, et J son symétrique par rapport à 0.

Soient a et b deux éléments de I et $a' = -a$, $b' = -b$ les éléments correspondants dans J .

$$\begin{aligned} T_f^J &= \frac{f(a') - f(b')}{a' - b'} = \frac{f(-a) - f(-b)}{(-a) - (-b)} \\ &= \frac{f(a) - f(b)}{-(a - b)} = -T_f \quad (\text{car } f \text{ est paire}). \end{aligned}$$

D'où la propriété si la fonction est paire.

Pour la démonstration dans le cas où la fonction est impaire, on utilise la même procédure.



Exercice 4.3. Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$.

1. Déterminer D_f . Et étudier la parité de la fonction f .
2. Montrer que pour tous a et b dans $]0; +\infty[$, on a $T = \frac{ab-9}{3ab}$.
3. Dédurre le sens de variations de la fonction f sur $[3; +\infty[$ et $]0; 3]$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur D_f en précisant sa valeur maximale et sa valeur minimale.
5. Soit g une fonction définie par :

x	-4	-3	1	3	+4
$g(x)$	5	-1			

Compléter le tableau dans les deux cas suivants : g paire, puis g impaire.

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4.4.4 Extremums

a) – Extremums absolus

Activité 4.4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$.
Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \leq f(0))$.

Solution.

Définition 4.6. Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f .

- On dit que f admet un maximum absolu en α si : $(\forall x \in D_f)(f(x) \leq f(\alpha))$.
On écrit : $\max_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$.
- On dit que f admet un minimum absolu en α si : $(\forall x \in D_f)(f(x) \geq f(\alpha))$.
On écrit : $\min_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$.

b) – Extremums relatifs

Activité 4.5. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

1. Étudier la parité de la fonction g .
2. Étudier les variations de la fonction g sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Solution.

Définition 4.7. Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f .

- On dit que f admet un maximum relatif en α s'il existe un intervalle ouvert inclus dans D_f et qui contient α tel que : $(\forall x \in I)(f(x) \leq f(\alpha))$.
- On dit que f admet un minimum relatif en α s'il existe un intervalle ouvert inclus dans D_f et qui contient α tel que : $(\forall x \in I)(f(x) \geq f(\alpha))$.

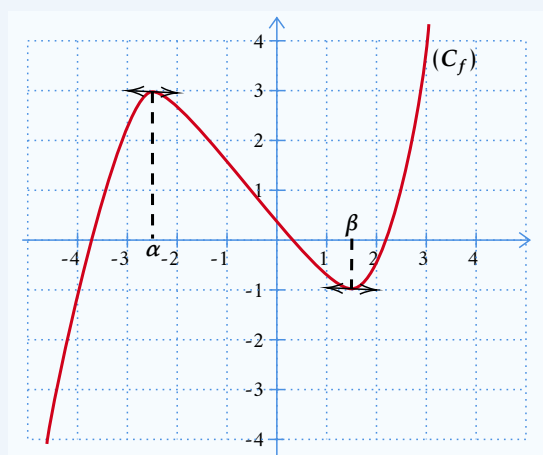
Propriété 4.3. Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , a , b et c trois éléments de D_f tels que $a < b < c$ et $[a, c] \subset D_f$.

- Si f est croissante sur $[a, b]$ et décroissante sur $[b, c]$ alors f admet un maximum relatif en b .
- Si f est décroissante sur $[a, b]$ et croissante sur $[b, c]$ alors f admet un minimum relatif en b .

Remarque.

- Si f admet un maximum absolu en α , alors $f(\alpha)$ est un majorant de f .
- Si f admet un minimum absolu en α , alors $f(\alpha)$ est un minorant de f .
- $f(\alpha)$ est la valeur maximale de f sur un ensemble D , alors cela équivaut à dire que f admet un maximum relatif en α sur l'ensemble D .
- $f(\alpha)$ est la valeur minimale de f sur un ensemble D , alors cela équivaut à dire que f admet un minimum relatif en α sur l'ensemble D .

Illustration :



Sur la figure ci-dessus on a : f admet un maximum relatif en α et admet un minimum relatif en β .

Exemple 4.5. -3 est la valeur minimale de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

En effet : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) - (-3) = (x - 2)^2 \geq 0$ et $f(2) = -3$.

Exercice 4.4. Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

1. Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .
2. (a) Calculer $f(2)$.
(b) Montrer que f est minorée par 4 sur $]0; +\infty[$. Conclure.
3. Montrer que -4 est une valeur maximale de f sur $] -\infty; 0[$.

Solution.

4.4.5 Monotonie des fonctions $k + f$ et $k \cdot f$

Activité 4.6. f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur I .

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur I .

1. Déterminer T_h le taux d'accroissement de la fonction $h(x) = f(x) + k$ sur I (avec $k \in \mathbb{R}$).
2. Déterminer T_g le taux d'accroissement de la fonction $g(x) = k \times f(x)$ sur I (avec $k \in \mathbb{R}$).
3. Donner la propriété obtenue.

Solution.

1 Calculons T_h :

Soient x et x' de I tels que $x' \neq x$. On a :

$$\begin{aligned} T_h &= \frac{h(x) - h(x')}{x - x'} \\ &= \frac{f(x) + k - (f(x') + k)}{x - x'} = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = T_f. \end{aligned}$$

D'où : $T_h = T_f$.

Conclusion : f et $f + k$ varient dans le même sens sur I (ont le même sens de variation sur I).

2 Calculons T_g :

Soient x et x' de I tels que $x' \neq x$. On a :

$$\begin{aligned} T_g &= \frac{g(x) - g(x')}{x - x'} = \frac{k \times f(x) - k \times f(x')}{x - x'} \\ &= \frac{k \times (f(x) - f(x'))}{x - x'} = k \times T_f. \end{aligned}$$

D'où : $T_g = k \times T_f$.

Conclusion :

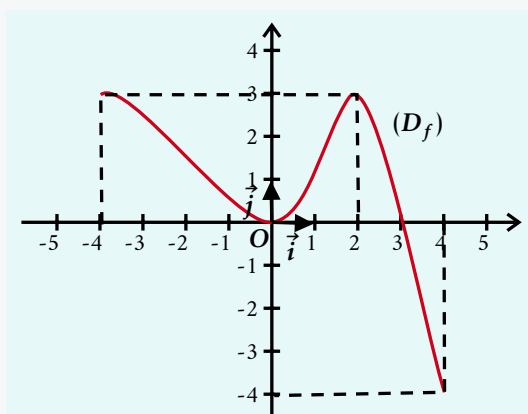
- Si $k > 0$, alors f et $k \times f$ varient dans le même sens sur I .
- Si $k < 0$, alors f et $k \times f$ varient dans des sens opposés sur I .

Propriété 4.4. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et k un nombre réel.

- Les deux fonctions f et $f + k$ ont le même sens de variations sur I .
- Si $k > 0$, alors f et kf ont le même sens de variations sur I .
- Si $k < 0$, alors f et kf ont des sens de variations contraires sur I .

Application 4.5. Soit f une fonction définie sur $[-4; 4]$ par sa courbe ci-dessous.

Donner le tableau de variations des fonctions f , $f + 2$ et $-3f$.



Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4.5 Image d'un intervalle par une fonction numérique

Définition 4.8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

L'ensemble des valeurs de $f(x)$ lorsque $x \in I$ est appelé image de l'intervalle I par la fonction f et on le note par $f(I)$.

Autrement dit :

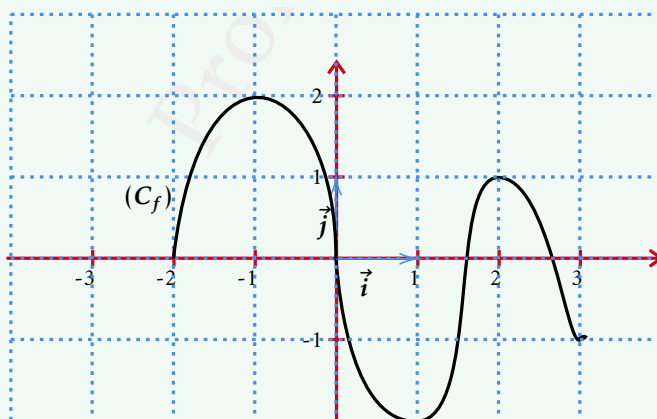
$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}.$$

Technique :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$.

- Si f est croissante sur $[a; b]$, alors : $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
- Si f est décroissante sur $[a; b]$, alors : $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$.
- Si f change de monotonie sur $[a; b]$, alors : $f([a; b]) = [m; M]$ avec m la valeur minimale et M la valeur maximale de f sur $[a; b]$.

Exemple 4.6. La figure ci-dessous représente la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 3]$.



Lorsque x varie sur l'intervalle $[-2; -1]$, $f(x)$ varie sur l'intervalle $[0; 2]$. Donc :

$$f([-2; -1]) = [0; 2].$$

De même, on a :

- $f([0; 1]) = [-2; 0]$
- $f([1; 2]) = [-2; 1]$
- $f([-1; 1]) = [0; 2]$
- $f([1; 3]) = [-2; 1]$
- $f([0; 3]) = [-2; 1]$
- $f([-2; 3]) = [-2; 2]$

Exercice 4.5. Soit f une fonction dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	-3	2	0	$\frac{5}{2}$	$-\infty$

Déterminer ce qui suit :

$$f([-4; 0]) ; \quad f([0; 1]) ; \quad f([0; 2]) ; \quad f([-4; 1]) ; \quad f([1; +\infty[).$$

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4.6 Composée de deux fonctions numériques

Activité 4.7. On considère f et g deux fonctions définies par $f(x) = -x + 5$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. (a) Calculer $f(1)$ puis $g(f(1))$.
 (b) Calculer $f(-4)$ puis $g(f(-4))$.
 (c) Calculer $f(8)$. Peut-on calculer $g(f(8))$?
2. (a) Déterminer l'intervalle I tel que $g(f(x))$ est calculable pour tout x de I .
 (b) Déterminer l'expression de $g(f(x))$ pour tout x de I .

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 4.9. g est une fonction définie sur un intervalle J et f est une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$.

La fonction composée de f et g dans cet ordre, notée $g \circ f$, est la fonction définie pour tout $x \in I$ par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Remarque.

- $x \in D_{g \circ f} \iff x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.
- En général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple 4.7. Soient $f : x \mapsto x^2$, définie sur $D_f = \mathbb{R}$, et $g : x \mapsto \frac{2x}{x-4}$, définie sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

— **Domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$:**

$$\begin{aligned} x \in D_{g \circ f} &\iff x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g \\ &\iff x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 \neq 4 \\ &\iff x \in \mathbb{R}, x \neq -2 \text{ et } x \neq 2. \end{aligned}$$

Donc $D_{g \circ f} =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$.

— **Expression de la fonction composée $g \circ f$:**

On a : $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[:$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}.$$

Application 4.6. 1. Soient f et g deux fonctions numériques définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$.

(a) Déterminer D_f , D_g et $D_{g \circ f}$.

(b) Donner l'expression de la fonction $g \circ f$.

2. Écrire la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}}$ sous forme de composée de deux fonctions.

Solution.

Propriété 4.5. Soient f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur les intervalles I et J tels que $f(I) \subset J$.

- Si f et g ont le même sens de variations, respectivement sur I et J , alors la fonction composée $g \circ f$ est croissante sur I .
- Si f et g ont des sens de variations contraires, respectivement sur I et J , alors la fonction composée $g \circ f$ est décroissante sur I .

Démonstration. Soient f et g deux fonctions dont les ensembles de définition respectifs sont D_f et D_g , et soient I un intervalle de D_f et J un intervalle de D_g tels que $f(I) \subset J$.

Soient a_1 et a_2 deux éléments de I tels que $f(a_1) = b_1$ et $f(a_2) = b_2$. On a :

$$\begin{aligned} T_{g \circ f} &= \frac{(g \circ f)(a_1) - (g \circ f)(a_2)}{a_1 - a_2} \\ &= \frac{g(f(a_1)) - g(f(a_2))}{a_1 - a_2} \\ &= \frac{g(b_1) - g(b_2)}{b_1 - b_2} \times \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \\ &= \frac{g(b_1) - g(b_2)}{b_1 - b_2} \times \frac{f(a_1) - f(a_2)}{a_1 - a_2} = T_g \times T_f. \end{aligned}$$

D'où la propriété énoncée. ■

Exemple 4.8. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

h est la composée des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ ($h = g \circ f$).

1. On a que f est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et $f([-\infty; 0]) = [0; +\infty[$.
Puisque g est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors h est croissante sur $] -\infty; 0]$.
2. On a que f est croissante sur $[0; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$.
Puisque g est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors h est décroissante sur $[0; +\infty[$.

Application 4.7. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x + 1$.

1. Dresser les tableaux de variations de f et g .
2. Déterminer $f([-\infty; 1])$ et $f([1; +\infty[)$.
3. Étudier les variations de la fonction $g \circ f$ sur $] -\infty; 1]$ et $[1; +\infty[$.

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4.6. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

1. Donner D_f , D_g et $D_{g \circ f}$.
2. Déterminer $(g \circ f)(x)$ pour tout $x \in D_{g \circ f}$.
3. Dresser les tableaux de variations de f et g .
4. Déterminer $f([-\infty; 1])$ et $f([1; +\infty[)$.
5. Étudier les variations de la fonction $g \circ f$ sur $] -\infty; 1]$ et $[1; +\infty[$.

Solution.**4.7 Représentation graphique des fonctions**

$$f(x) = \sqrt{x+a}, \quad f(x) = ax^3 \quad \text{et} \quad f(x) = E(x)$$

4.7.1 Représentation graphique de la fonction $f(x) = ax^3$

Soit a un nombre réel non nul et $f : x \mapsto ax^3$.

On a $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$.

Ce qui entraîne que f est impaire, donc qu'il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

Soient x et y deux éléments de $[0; +\infty[$ tels que $x < y$.

— **Si $a > 0$** : on a

$$x < y \Rightarrow x^3 < y^3 \Rightarrow ax^3 < ay^3 \quad (\text{car } a > 0) \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$, et puisqu'elle est impaire, alors elle est croissante sur $] -\infty; 0]$.

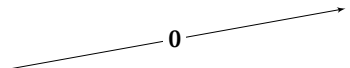
D'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.

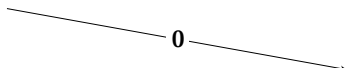
— **Si $a < 0$** : on a

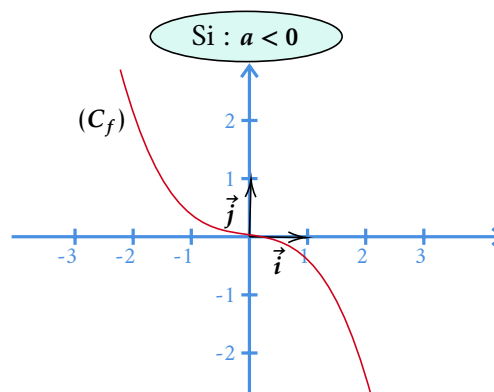
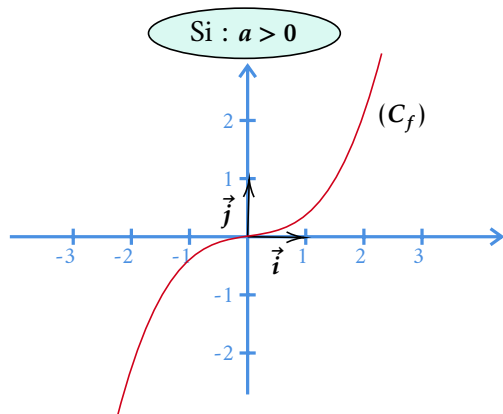
$$x < y \Rightarrow x^3 < y^3 \Rightarrow ax^3 > ay^3 \quad (\text{car } a < 0) \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$, et puisqu'elle est impaire, alors elle est décroissante sur $] -\infty; 0]$.

D'où f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si : $a > 0$:		
x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Si : $a < 0$:		
x	$-\infty$	$+\infty$
f		



4.7.2 Représentation graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$

Soit a un nombre réel non nul et $f : x \mapsto \sqrt{x+a}$.

On a $D_f = [-a; +\infty[$.

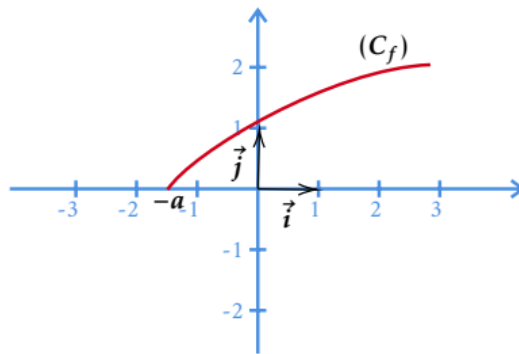
Soient x et y deux éléments de $D_f = [-a; +\infty[$ tels que $x < y$.

On a :

$$x < y \Rightarrow x + a < y + a \Rightarrow \sqrt{x+a} < \sqrt{y+a} \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Donc f est strictement croissante sur $[-a; +\infty[$.

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$



Application 4.8. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = -x^3$, et soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Étudier les variations de f et g .
2. Construire (C_f) et (C_g) .
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x+3} + x^3 < 0$ sur $[-2; +\infty[$.

Solution.

Exercice 4.7. Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$, et soient (C_f) et (C_g) leurs courbes respectives dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. (a) Déterminer D_g , puis vérifier que $f(2) = g(2)$.
 (b) Représenter les courbes (C_f) et (C_g) .
 (c) Déterminer graphiquement $f([-\infty; \frac{1}{2}])$.
 (d) Résoudre graphiquement sur $[-2; +\infty[$ l'inéquation $x^2 - x - \sqrt{x+2} \leq 0$.
2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$.

- (a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) = (g \circ f)(x)$.
- (b) Déterminer les variations de la fonction h sur les intervalles $] -\infty; \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}; +\infty[$ en utilisant les variations de f et g .

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4.7.3 Étude de la fonction $f(x) = E(x)$

Activité 4.8. Soit x un réel. Compléter le tableau suivant en déterminant le nombre entier relatif p ($p \in \mathbb{Z}$) tel que $p \leq x < p + 1$.

x	4.5	0.7	-0.3	-4.1
p				

Le nombre entier relatif s'appelle la **partie entière relative** du nombre réel x , on note $p = E(x)$ ou encore $p = [x]$.

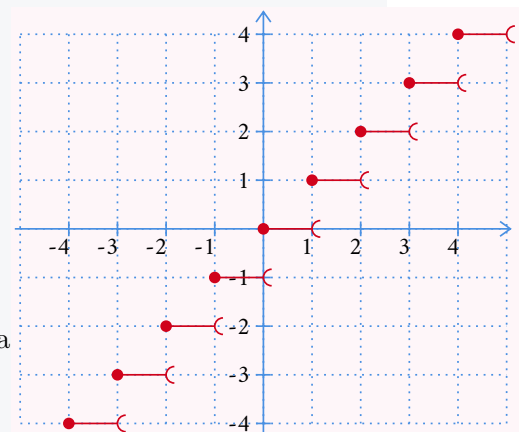
Définition 4.10. Soit x un nombre réel. Le nombre entier relatif p qui vérifie $p \leq x < p + 1$ s'appelle la **partie entière relative** du nombre réel x , on note $p = E(x)$ ou encore $p = [x]$.

Exemple 4.9.

$$E(5) = 5 ; \quad E(-3.2) = -4 ; \quad E(6.9) = 6 ; \quad E\left(\frac{7}{3}\right) = 2 ; \quad E\left(-\frac{7}{3}\right) = -3.$$

Propriété 4.6.

- $\forall x \in [p; p + 1] ; E(x) = p.$
- $\forall x \in \mathbb{Z} ; E(x) = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; E(x) \leq x < E(x) + 1.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} :$
 $E(x + k) = E(x) + k.$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; x - 1 < E(x) \leq x.$
- Ci-contre, la représentation graphique de la fonction $x \mapsto E(x)$.



Application 4.9. Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - E(x)$.

On considère les intervalles I_k tels que $I_k = [k; k + 1]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'expression de $f(x)$ sur I_k .
2. Construire C_0 la courbe de f sur $I_0 = [0; 1]$.
3. Dédire les courbes C_k de f sur $I_k = [k; k + 1]$.

Solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4.8 Série d'exercices

Exercice 4.8. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

1. Déterminer D_f et étudier la parité de la fonction f .
2. Vérifier que : $(\forall x \in D_f); (f(x))^2 = 4 + \frac{16}{x^2 - 4}$.
3. Montrer que pour tout x et y de D_f tel que $x \neq y$:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-16(x + y)}{(x^2 - 4)(y^2 - 4)} \times \frac{1}{f(x) + f(y)}.$$

4. Étudier la monotonie de la fonction f sur $]2; +\infty[$ et sur $[0; 2[$.
5. Donner le tableau de variations de f sur D_f .

Exercice 4.9. On considère la fonction f définie par $f(x) = x(1 - x)$.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \leq \frac{1}{4}$.
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$.
3. (a) Démontrer que $f(x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$.
 (b) Écrire f comme composée de la fonction carrée et de deux fonctions affines dont on donnera le sens de variation.
 (c) En déduire le sens de variation de f .

Exercice 4.10. Déterminer $g \circ f$ dans chacun des cas suivants :

1. $g(x) = 3x + 2$ et $f(x) = x^2 - 1$.
2. $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $f(x) = x^2$.

3. $g(x) = x^2 + 2x + 1$ et $f(x) = \sqrt{x}$.
4. $g(x) = \frac{x-1}{2-x}$ et $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

Exercice 4.11. Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = \frac{1-2x}{x-1}$.

1. Donner le tableau de variation de la fonction f et celui de la fonction g .
2. Déterminer la monotonie de la fonction $g \circ f$ sur les deux intervalles : $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Exercice 4.12. Soient f et g les fonctions définies par : $g(x) = \frac{x}{2x+4}$ et $f(x) = (x+1)^2$.

1. Donner le tableau de variations de la fonction f et celui de g .
2. On pose : $\forall x \in \mathbb{R} : h(x) = (g \circ f)(x)$.
 - (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : h(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x^2+4x+6}$.
 - (b) Déterminer la monotonie de la fonction h sur les intervalles suivants : $[-\infty; -1]$ et $[-1; +\infty[$.

Exercice 4.13. Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$.

1. (a) Donner les tableaux de variations des fonctions f et g .
 (b) Représenter les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 (c) Déterminer graphiquement $g([-1; 0])$ et $g([0; +\infty[)$.
2. Soit h la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $h(x) = x + 4 - 2\sqrt{x+1}$.
 - (a) Vérifier que : $(\forall x \in [-1; +\infty[); h(x) = (f \circ g)(x)$.
 - (b) Étudier la monotonie de la fonction h sur les intervalles $[0; +\infty[$ et $[-1; 0]$ à partir de celle de f et g . Puis déduire les extremums de h sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ s'ils existent.
 - (c) Montrer que : $(\forall a \in [-1; +\infty[); \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 4.14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-|x|} & ; |x| \leq 2, \\ \frac{-2|x|+4}{|x|+1} & ; |x| > 2. \end{cases}$$

1. Montrer que f est paire et que $A(2; 0) \in (C_f)$.
2. Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ puis donner son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que f est minorée par -2 sur $\mathbb{R}$. Est-ce que -2 est un minimum de la fonction f ?
 (b) Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.
4. Représenter la courbe représentative (C_f) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$. Représenter la courbe représentative (C_g) de la fonction g dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
6. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $h(x) = (f \circ g)(x)$.
 - (a) Déterminer $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$.
 - (b) Étudier la monotonie de la fonction h sur $\mathbb{R}^{*+}$ à partir de celle des fonctions f et g .
 - (c) Étudier le signe de h .

Exercice 4.15. 1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4[\sqrt{x}] + 1 = x$.

- (b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); [x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]$. En déduire la valeur de la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left[\frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right].$$

2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x - E(x))(E(x) - x + 2)$.
 - (a) Déterminer D_f , l'ensemble de définition de la fonction f .
 - (b) Montrer que f est périodique de période $T = 2$.
 - (c) Calculer $f(x)$ pour tout $x \in [0; 1[$.
 - (d) Représenter la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; 4]$.

($[\cdot]$ désigne la partie entière)